Théorème de Weierstrass

Exercice Dans chacun des cas suivant donnez une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui s'annule sur A

1. $A = \mathbf{Z} - \{42\}$,
2. $A = \mathbf{N}$,
3. $A = q^{\mathbf{N}}$ pour un $q \in \mathbf{C}$, $|q| > 1$.

Exercice [Facteurs élémentaires]
On considère les fonctions entières suivantes :

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{et} \quad \forall\, k \geq 1,\ E_k(z) = (1-z)\exp(p_k(z))$$

avec $p_k(z) = z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^k}{k}$.

1. Montrer que $(1-z)p_k'(z) = 1 - z^k$ et en déduire que $|E_k'(z)| = -z^k \exp(p_k(z))$.
2. Montrer que si $t \in \mathbf{R}^+$ et $|z| \leq 1$, on a : $|E_k'(tz)| \leq -|z|^k E_k'(t)$.
3. En écrivant $E_k(z) - 1 = \int_{[0,z]} E_k'(u)du$ et en paramétrant le segment $[0, z]$, établir la majoration suivante :

$$\forall\, k \geq 0,\ \forall\, |z| \leq 1, \quad |1 - E_k(z)| \leq |z|^{k+1}.$$

Exercice [Zéros prescrits ; $\mathscr{M}(\mathbf{C}) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(\mathbf{C}))$]
On considère une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de complexes non nuls vérifiant $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

1. Montrer que le produit

$$h(z) := \prod_{n\geq 1} E_{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge normalement sur tout compact et définit donc une fonction entière.

2. Préciser l'ensemble des zéros de h ainsi que leurs multiplicités.
3. Conclure des questions précédentes le résultat suivant (dû à Weierstraß) :
Toute fonction entière f peut s'écrire

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n\geq 1} E_{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

avec $m \geq 0$ un entier, $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros (non nuls) de f comptés avec multiplicité et g une fonction entière. Le produit convergeant uniformément sur tout compact.

4. Montrer enfin que toute fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ est globalement le quotient de 2 fonctions entières :

$$\forall\, f \in \mathcal{M}(\mathbf{C}),\ \exists (g, h) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}), \quad f = \frac{g}{h}.$$

Exercice $\star$[$\mathscr{M}(U) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(U))$]

c.f. Rudin